

ANALISA PERSAMAAN PANAS DAN NILAI STERILISASI PADA PROSES STERILISASI MAKANAN KALENG

Heat Equation Analyze and Sterilized Value of Canned Food Sterilization Process

Oleh :

Dedik Ardian

1202 109 026

Pembimbing :

1. Drs. Lukman Hanafi, M.Sc
2. Dra. Mardijah, M.T

ABSTRAK

Salah satu dari beragam masalah yang dapat diselesaikan dengan ilmu perpindahan panas adalah persamaan panas pada proses sterilisasi makanan kaleng. Optimasi proses sterilisasi makanan kaleng diperlukan untuk dapat menentukan kombinasi suhu dan waktu selama pemanasan yang dapat memenuhi kriteria keamanan pangan dan mutu. Penyelesaian dan simulasi model dari permasalahan menggunakan metode beda hingga untuk mendapatkan solusi numeriknya. Metode beda hingga merupakan salah satu bentuk penyelesaian numerik yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan difrensial.

Kata kunci : *heat transfer*, persamaan panas, sterilisasi, makanan, kaleng

I. Pendahuluan

Perkembangan ilmu pengetahuan dan teknologi yang ada saat ini memerlukan suatu solusi yang tepat dari permasalahan yang ada, terutama dalam bidang industri. Persoalan yang timbul adalah bagaimana membawanya ke dalam bentuk matematika sehingga nantinya dapat diselesaikan menggunakan metode matematika dengan memperhatikan syarat-syarat batasnya. Dalam kehidupan sehari-hari banyak dijumpai hal-hal yang berkaitan dengan perpindahan panas, terutama dalam bidang industri. Perpindahan panas atau *heat transfer* adalah ilmu yang meramalkan perpindahan energi yang terjadi karena adanya perbedaan temperatur diantara benda atau material. Ilmu perpindahan panas tidak hanya mencoba menjelaskan bagaimana energi panas itu berpindah dari suatu benda ke benda lainnya, tetapi juga dapat meramalkan laju perpindahan yang terjadi pada kondisi-kondisi tertentu. salah satu dari beragam masalah yang dapat diselesaikan dengan ilmu perpindahan panas adalah persamaan panas pada proses sterilisasi makanan kaleng.

Proses sterilisasi makanan kaleng dengan pemanasan dilakukan untuk penentuan jaminan keselamatan bahan makanan. jaminan ini meliputi tepat atau tidaknya tanggal kadaluwarsa yang tercantum pada label, rusak tidaknya kualitas makanan dan jumlah kandungan nutrisi yang ada. Namun demikian, proses sterilisasi makanan yang diberikan tidak semata-mata membunuh mikroba, tetapi juga harus mempertimbangkan mutu akhir dari produk, dimana kerusakan mutu oleh pemanasan harus diminimalkan. Dengan demikian, optimasi proses sterilisasi makanan kaleng diperlukan untuk dapat

menentukan kombinasi suhu dan waktu selama pemanasan yang dapat memenuhi kriteria keamanan pangan dan mutu.

Tujuan dari tugas akhir ini adalah menyusun persamaan matematika dari proses sterilisasi dan pertumbuhan mikroorganisme pada makanan kaleng agar dapat diselesaikan secara numerik dengan metode beda hingga. Sehingga dapat memberikan informasi kepada industri makanan dalam melakukan sterilisasi pada makanan kaleng.

II. Tinjauan Pustaka

2.1 Hukum Dasar Termodinamika

Termodinamika adalah cabang ilmu pengetahuan yang membahas hubungan antara panas dan bentuk-bentuk energi lainnya. Termodinamika membahas sistem dalam keseimbangan. Ilmu ini dapat digunakan untuk meramalkan energi yang diperlukan untuk mengubah dari keadaan setimbang ke keadaan setimbang yang lain, tetapi tidak dapat meramalkan kecepatan perpindahan itu.

Hukum pertama termodinamika, menyatakan bahwa energi tidak dapat diciptakan maupun dihilangkan tetapi hanya dapat diubah dari satu bentuk menjadi bentuk lainnya. sedangkan hukum kedua termodinamika menyatakan panas akan mengalir secara otomatis dari titik yang bersuhu lebih tinggi ke titik yang bersuhu lebih rendah.

Semua proses perpindahan panas menyangkut perpindahan dan pengubahan energi. Karenanya proses-proses itu harus mengikuti hukum

pertama maupun kedua termodinamika, tapi seperti yang kita ketahui bahwa ilmu termodinamika tidak dapat meramalkan laju perpindahan kalor. Ilmu tentang perpindahan panas memberikan metode untuk menyelesaikan masalah laju perpindahan kalor.

2.2 Perpindahan Panas

Dalam buku prinsip-prinsip perpindahan panas (Kreith.F,1994) disebutkan bahwa panas adalah suatu bentuk energi yang dipindahkan melalui batas sistem yang ada pada temperatur yang lebih tinggi ke sistem lain atau lingkungan yang mempunyai temperatur yang lebih rendah. Suatu benda tidak dapat memiliki panas, akan tetapi panas dapat dikenali pada saat melalui batas sistem. Sedangkan perpindahan panas adalah berlangsungnya perpindahan energi karena adanya perbedaan temperatur antara dua sistem yang bersinggungan, dimana arah perpindahannya dari daerah yang bertemperatur lebih rendah didalam suatu medium baik padat, cair maupun gas. Perpindahan panas mengenal tiga cara pemindahan yang berbeda yaitu:

1. Konduksi atau hantaran
2. Konveksi
3. Radiasi atau Pancaran.

2.3 Kondisi Perpindahan Panas

Masalah Perpindahan Panas tidak hanya bergantung pada prosesnya tetapi juga bergantung pada kondisi proses berlangsungnya perpindahan panas tersebut. Umumnya kondisi berlangsungnya proses perpindahan panas ada dua macam yaitu :

1. Kondisi *Steady* (Tunak).
2. Kondisi *Unsteady* (Tidak tunak)

2.4 Konduktivitas Thermal

Persamaan laju perpindahan panas konduksi merupakan persamaan dasar konduktivitas termal. Konduktivitas termal tergantung pada temperature, bila aliran panas dinyatakan dalam satuan watt, maka satuan konduktivitas termal adalah watt per meter per derajat celcius/Kelvin. Angka konduktivitas termal menunjukkan panas yang mengalir pada bahan tertentu.

2.5 Difrensial Numerik

Metode numerik adalah teknik untuk menyelesaikan masalah- masalah yang diformulasikan secara matematis dengan cara operasi hitungan. Pada metode Numerik dilakukan operasi hitungan dalam jumlah besar dan berulang-ulang. Oleh karena itu, diperlukan bantuan komputer untuk melakukan operasi hitungan tersebut. Sedangkan difrensial numerik digunakan untuk memperkirakan bentuk difrensial kontinu menjadi bentuk diskret. Bentuk tersebut dapat diturunkan

berdasarkan deret taylor. Deret Taylor dapat dijelaskan sebagai berikut, pandang fungsi $f(x)$ sedemikian hingga

$$f(x), f'(x), f''(x), \dots, f^{(n-1)}(x) \text{ adalah}$$

kontinu dalam selang $(a, a+h)$ dan $f^{(n)}(x)$ dalam selang $(a, a+h)$, maka:

$$f(a+h) = f(a) + h^2 \frac{f''(a)}{2!} + \dots + \frac{h^{(n-1)}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + R_n$$

$$\text{Dengan } R_n = \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a+\theta) ; 0 < \theta < 1, \text{ dan}$$

bentuk sisa R_n ini disebut suku sisa lagrange. Untuk menyelesaikan persamaan diferensial diperlukan syarat batas, syarat batas dan syarat awal persamaan diferensial parsial harus spesifik untuk mendapatkan penyelesaian numeriknya.

2.6 Metode Beda hingga

Suatu fungsi dari suatu variable bebas f dan dapat dideferensialkan sampai n kali didalam interval $[x_0 - h, x_0 + h]$ dimana h cukup kecil, dapat diuraikan dalam bentuk deret pangkat menurut theorema taylor sebagai berikut:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2!} f''(x_0) + \dots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + \dots \quad (2.6)$$

$$f(x_0 - h) = f(x_0) - hf'(x_0) + \frac{h^2}{2!} f''(x_0) - \dots + (-1)^n \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + \dots \quad (2.7)$$

Persamaan (2.6) dan (2.7) diatur kembali sehingga diperoleh:

$$\frac{df(x_0)}{dx} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - \frac{h}{2!} f''(x_0) - \dots - \frac{h^{n-1}}{n!} f^{(n)}(x_0) \quad (2.8)$$

$$\frac{df(x_0)}{dx} = \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h} + \frac{h}{2!} f''(x_0) - \dots - (-1)^n \frac{h^{n-1}}{n!} f^{(n)}(x_0) \quad (2.9)$$

Dari persamaan (2.8) dan (2.9) dibuat harga pendekatan turunan pertama $f'(x)$ dititik x_0 , yaitu

$$\frac{df(x_0)}{dx} \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad (2.10)$$

$$\frac{df(x_0)}{dx} \approx \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h} \quad (2.11)$$

Dari persamaan (2.10) dan (2.11) akan timbul kesalahan E_r . Kesalahan E_r ini dapat dinyatakan dalam bentuk suku pertama atau suku terbesar dari sisa deret yaitu:

$$E_r = \pm \frac{h}{2!} f''(x_0) |_{\theta=0}(h) \quad (2.12)$$

Dengan menggunakan persamaan (2.6) dan (2.7), diperoleh bentuk pendekatan turunan pertama yang lain, yaitu

$$\frac{df(x_0)}{dx} \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h} \quad (2.13)$$

Dengan orde kesalahan

$$E_r = -\frac{h^2}{6} f^{(3)}(x_0) |_{\theta} O(h^2),$$

dengan $x_0 - h \leq \theta \leq x_0 + h$

Jika sumbu x dibagi kedalam beberapa interval $\Delta x = h$ yang panjangnya sama, maka absis titik kisi i dapat dituliskan dalam bentuk $x_i = i\Delta x = ih_1$ sehingga bentuk pendekatan turunan pertama di titik kisi i menjadi

1. Pendekatan beda maju

$$\frac{df(x_i)}{dx} \approx \frac{f_{i+1} - f_i}{h} \quad (2.14)$$

2. Pendekatan beda mundur

$$\frac{df(x_i)}{dx} \approx \frac{f_i - f_{i-1}}{h} \quad (2.15)$$

3. Bentuk pendekatan beda pusat

$$\frac{df(x_i)}{dx} \approx \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} \quad (2.16)$$

dengan $f_i = f(x_i), x_i = i\Delta x = ih, i = 1, 2, \dots, N - 1$

Persamaan (2.10) ditambah dengan persamaan (2.11) dan $x = i\Delta x$, maka diperoleh bentuk pendekatan turunan kedua yaitu:

$$\frac{d^2 f(x_i)}{dx^2} \approx \frac{f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1}}{h^2} \quad (2.18)$$

Dengan orde kesalahan

$$E_r = O(h^2) = -\frac{h^2}{12} f^{(4)}(x_0) |_{\theta},$$

Dengan $x_0 - h \leq \theta \leq x_0 + h$

Pendekatan bentuk turunan fungsi dari fungsi variable banyak dapat dilakukan dengan cara yang sama.

2.7 Proses sterilisasi makanan kaleng

Proses sterilisasi merupakan proses utama pada proses produksi pangan steril komersial, khususnya untuk menjamin tercapainya keamanan pangan steril komersial. Sterilisasi (*Processing*) pada pengalengan adalah proses pemanasan wadah serta isinya pada suhu dan jangka waktu tertentu untuk menghilangkan atau mengurangi faktor-faktor penyebab kerusakan makanan, tanpa menimbulkan gejala lewat pemasakan (*over cooking*) pada makanannya. Waktu dan suhu yang diperlukan untuk proses sterilisasi biasanya tergantung pada konsistensi atau ukuran partikel bahan, derajat keasaman isi kaleng, ukuran headspace, besar dan

ukuran kaleng, kemurnian uap air (*steam*) yang digunakan, dan kecepatan perambatan panas.

2.8 Nilai sterilisasi

Mikroba mempunyai ketahanan panas yang berbeda-beda. Seperti yang ditunjukkan pada **Tabel 1** memperlihatkan kombinasi suhu dan waktu yang diperlukan untuk membunuh mikroba. Sel vegetatif khamir dan kapang dapat diinaktifkan pada suhu yang lebih rendah ($60 - 88^{\circ}C$), sedangkan bakteri termofilik dan mesofilik perlu suhu yang lebih tinggi untuk membunuhnya (umumnya pada suhu standar $121^{\circ}C$).

Tabel 1. Kombinasi suhu dan waktu yang diperlukan untuk menurunkan jumlah mikroba pada level yang sama.

Organisme	Waktu (menit)	Suhu ($^{\circ}C$)
Sel Vegetatif	10	80
Khamir	5	60
Kapang	30 - 60	88
Bakteri Termofilik :		
• Clostridium Thermosaccharilyticum	3 - 4	121
• Bacillus	4	121
Bakteri Mesofilik		
• Clostridium Botulinum	3	121
• Toksin Botulinum A & B	0,1 - 1	121
• Clostridium Sporogenes	1,5	121
• Bacillus Subtilis	0,6 menit	121

Apabila suspensi mikroba dipanaskan pada suhu konstan, maka penurunan jumlah mikroba mengikuti pola logaritmik sebagai fungsi dari waktu. Pada suhu tertentu, laju inaktivasi mikroba selama waktu pemanasan pada suhu tertentu dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$\frac{dN}{dt} = -kN \quad (2.19)$$

dengan :

N : Jumlah mikroba sisa yang masih hidup setelah pemanasan

t : Waktu pemanasan

k : laju reaksi

apabila persamaan (2.19) diintegrasikan, maka diperoleh persamaan berikut :

$$\ln \frac{N}{N_0} = -kt \quad (2.20)$$

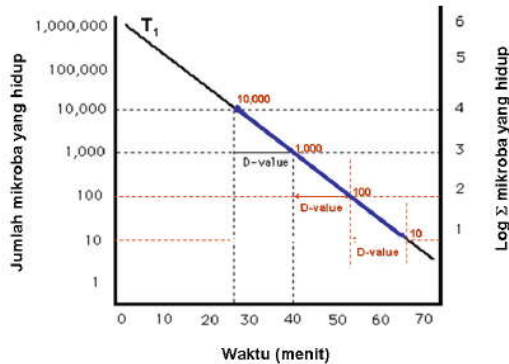
Persamaan (2.20) menunjukkan plot kurva semilogaritma N terhadap t persamaan tersebut dapat dirubah menjadi lebih sederhana

$$2.303 \log \frac{N}{N_0} = -kt \text{ atau } \log \frac{N}{N_0} = -\frac{kt}{2.303} \quad (2.21)$$

Nilai slope $2.303/k$ sering dinyatakan dengan nilai β , sehingga :

$$\log \frac{N}{N_0} = -\frac{t}{\beta} \quad (2.22)$$

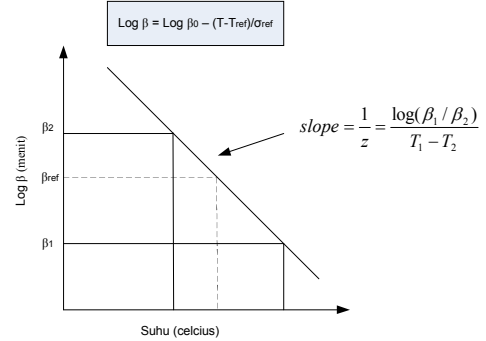
Dengan $\beta = 2.303/k$, yaitu waktu penurunan desimal (*decimal reduction time*). Nilai β dipengaruhi oleh suhu, semakin tinggi suhu pemanasan, maka waktu yang diperlukan untuk menginaktivasi mikroba akan semakin pendek. Gambar 2 memperlihatkan pengaruh suhu terhadap nilai β . Pada suhu pemanasan yang lebih tinggi kurva akan semakin curam yang memberikan slope kurva $-1/\beta$ semakin besar atau nilai β semakin kecil.



Gambar 2. Pengaruh suhu terhadap nilai β

Nilai β dari setiap mikroba memiliki sensitivitas yang berbeda terhadap perubahan suhu. Sensitifitas yang berbeda terhadap perubahan suhu. Sensitifitas nilai β terhadap suhu sering dinyatakan dengan nilai σ_{ref} , yaitu perubahan suhu yang diperlukan untuk merubah nilai β sebesar 90% atau 1 siklus logaritma. Misalnya, *Clostridium botulinum* memiliki nilai σ_{ref} sebesar $10^0 C$, artinya untuk merubah nilai β mikroba tersebut dari 0.25 menit pada suhu $121^0 C$ menjadi 0.025 menit (menurun sebesar 90% atau satu siklus logaritma), suhu

pemanasan harus dinaikkan sebesar $10^0 C$, yaitu menjadi $131^0 C$.



Gambar 3. kurva semi-logaritmik hubungan antar nilai β dengan suhu.

Kurva semi logaritmik ini berbentuk linear dengan slope-nya adalah $-1/\sigma_{ref}$ secara matematis, nilai β_T pada suhu tertentu dapat dinyatakan dengan persamaan berikut :

$$\log \frac{\beta}{\beta_T} = \frac{T - T_{ref}}{\sigma_{ref}} \quad (2.23)$$

dengan :

β : waktu yang dibutuhkan untuk mengurangi bakteri sebanyak 90 persen (menit)

β_T : nilai β pada suhu tertentu (menit)

T : suhu pemanasan tertentu ($^0 C / ^0 F$)

T_{ref} : suhu standar yang digunakan untuk nilai β ($^0 C / ^0 F$)

σ_{ref} : sensitifitas nilai β terhadap suhu ($^0 C / ^0 F$)

III. Metode Penelitian

Metode yang digunakan pada Tugas Akhir ini adalah sebagai berikut:

1. Menguraikan landasan teori
2. Analisa perpindahan panas pada proses sterilisasi makanan kaleng.
3. Membangun solusi numerik menggunakan metode beda hingga
4. Menyusun algoritma dan program dalam bahasa pemrograman MATLAB.
5. Running program
6. Analisis hasil
7. Menarik kesimpulan dan menyusun laporan tugas akhir

IV. ANALISIS DAN PEMBAHASAN

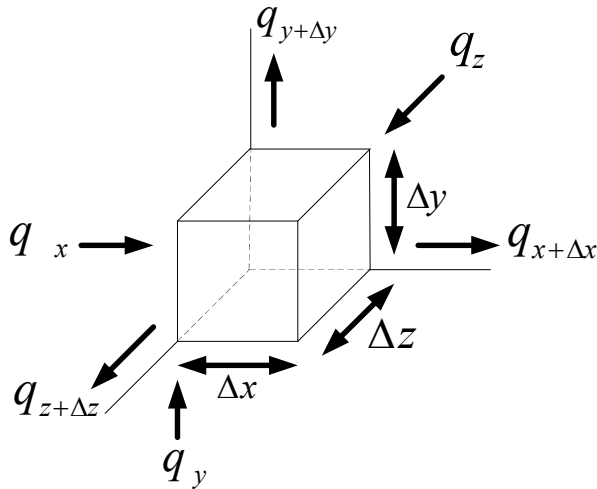
4.1 Pemodelan Matematis

Proses sterilisasi makanan kaleng memiliki serangkaian kendala yang harus diperhatikan. Kendala yang ada diantaranya adalah proses perambatan panas yang dimodelkan dengan persamaan difensial parsial orde dua dan kendala yang lain berupa nilai sterilisasi dengan memperhatikan derajat pertumbuhan mikroorganisme dalam makanan kaleng.

Proses pemodelan persamaan panas dimensi tiga disini dimulai dari sistem koordinat kartesius kemudian ditransformasikan kedalam sistem koordinat tabung. Pemakaian sistem koordinat tabung karena lebih sesuai dengan masalah yang akan diselesaikan, yaitu kaleng berbentuk tabung.

Selanjutnya akan dicari model matematis perambatan panas yang terjadi. Namun untuk selanjutnya pemanasan tergantung dari jenis bahannya yang diamati, seperti makanan kaleng tergantung jenis makanannya yang terlihat dari kalor jenis bahan c , konduktifitas suhu bahan k dan masa jenis bahan ρ .

Persamaan konduksi pada tiga dimensi dapat diturunkan dari bentuk kontrol volume yang tepi-tepinya Δx , Δy , dan Δz masing-masing sejajar dengan sumbu x , y , dan z seperti yang ditunjukkan pada gambar 4.1



Gambar 4.1 kontrol volume benda dimensi tiga

Karena volume dari elemen tersebut adalah $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$, maka massanya adalah $\Delta m = \rho \Delta V = \rho \Delta x \Delta y \Delta z$. Jumlah panas pada elemen ini saat waktu t adalah :

$$Q(x, y, z, t, \Delta x, \Delta y, \Delta z) = c \Delta m T(x, y, z, t) = c \rho \Delta x \Delta y \Delta z T(x, y, z, t) \quad (4.1)$$

Rata-rata perubahan jumlah panas pada elemen ini diberikan oleh :

$$\frac{dQ}{dt} = c \rho \Delta x \Delta y \Delta z \frac{\partial T}{\partial t}(x, y, z, t) \quad (4.2)$$

Sesuai dengan prinsip kekekalan energi, yaitu rata-rata perubahan panas harus sama dengan aliran panas yang masuk dikurangi aliran panas yang keluar, maka didapat :

$$\frac{dQ}{dt} = q_x + q_y + q_z - q_{x+\Delta x} - q_{y+\Delta y} - q_{z+\Delta z} \quad (4.3)$$

Sedangkan kuantitas energi di tunjukkan oleh persamaan dibawah ini, yaitu:

$$q_x = -k \Delta y \Delta z \frac{\partial T}{\partial x} \quad (4.4)$$

$$q_{x+\Delta x} = - \left[k \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) \Delta x \right] \Delta y \Delta z \quad (4.5)$$

$$q_y = -k \Delta x \Delta z \frac{\partial T}{\partial y} \quad (4.6)$$

$$q_{y+\Delta y} = - \left[k \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) \Delta y \right] \Delta x \Delta z \quad (4.7)$$

$$q_z = -k \Delta x \Delta y \frac{\partial T}{\partial z} \quad (4.8)$$

$$q_{z+\Delta z} = - \left[k \frac{\partial T}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) \Delta z \right] \Delta x \Delta y \quad (4.9)$$

Persamaan (4.2) dan (4.4) sampai dengan persamaan (4.9) disubstitusikan ke persamaan (4.3) kemudian persamaan tersebut dibagi dengan $\Delta x \Delta y \Delta z$ didapat:

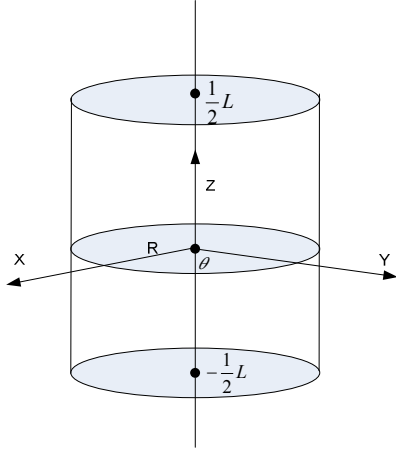
$$c \rho \frac{\partial T}{\partial t} = k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \quad (4.10)$$

Karena konduktifitasnya termalnya tetap, maka persamaan (4.10) dapat ditulis

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \nabla^2 T \quad (4.11)$$

dengan $\frac{1}{\alpha} = \frac{c \rho}{k}$ adalah konstanta penghamburan

panas dan $\nabla^2 T$ adalah operator laplace dan persamaan (4.11) inilah yang disebut sebagai persamaan panas pada benda dimensi tiga dalam koordinat kartesius



Gambar 4.2 Kaleng berbentuk tabung

Selanjutnya jika $T=T(x,y,z,t)$ ditransformasikan dalam koordinat tabung $T=T(r,\theta,z,t)$ seperti terlihat pada gambar 4.2 dengan transformasi sebagai berikut $x=r \cos \theta$, $y=r \sin \theta$ dan $Z=z$, maka didapat turunan parsial pertama

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial r} &= \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial T}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} \\ &= \cos \theta \frac{\partial T}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial T}{\partial y} \end{aligned} \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \theta} &= \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial T}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ &= -r \sin \theta \frac{\partial T}{\partial x} + r \cos \theta \frac{\partial T}{\partial y} \end{aligned} \quad (4.13)$$

atau dapat ditulis sebagai berikut

$$T_r = \cos \theta T_x + \sin \theta T_y \quad (4.14)$$

$$T_\theta = -r \sin \theta T_x + r \cos \theta T_y \quad (4.15)$$

dan dalam bentuk matriknya dapat dinyatakan sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -r \sin \theta & r \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_r \\ T_\theta \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

$$\begin{bmatrix} T_x \\ T_y \end{bmatrix} = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} r \cos \theta & -\sin \theta \\ r \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_r \\ T_\theta \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \theta T_r & -\frac{\sin \theta}{r} T_\theta \\ \sin \theta T_r & \frac{\cos \theta}{r} T_\theta \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

selanjutnya turunan parsial keduanya diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} &= \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial r} \left(\cos \theta \frac{\partial T}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial T}{\partial y} \right) \\ &= \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial T}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right) \right) \\ &= \cos \theta \left(\frac{\partial T_x}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial T_x}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} \right) + \sin \theta \left(\frac{\partial T_y}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial T_y}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} \right) \\ &= \cos \theta (T_{xx} \cos \theta + T_{xy} \sin \theta) + \sin \theta (T_{yx} \cos \theta + T_{yy} \sin \theta) \\ &= \cos^2 \theta T_{xx} + \sin \theta \cos \theta T_{xy} + \sin \theta \cos \theta T_{yx} + \sin^2 \theta T_{yy} \\ &= \cos^2 \theta T_{xx} + 2 \sin \theta \cos \theta T_{xy} + \sin^2 \theta T_{yy} \quad (4.19) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} &= \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial T}{\partial \theta} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial \theta} \left(-r \sin \theta \frac{\partial T}{\partial x} + r \cos \theta \frac{\partial T}{\partial y} \right) \\ &= r \left\{ -\cos \theta T_x - \sin \theta \frac{\partial}{\partial x} (T_x) - \sin \theta T_y + \cos \theta \frac{\partial}{\partial y} (T_y) \right\} \\ &= r \left\{ -\cos \theta T_x - \sin \theta \left(\frac{\partial T_x}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial T_x}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta} - \sin \theta T_x \right) + \cos \theta \left(\frac{\partial T_y}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial T_y}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta} \right) \right\} \\ &= r \left\{ -\cos \theta T_x - \sin \theta T_y + r \sin^2 \theta T_{xx} - r \sin \theta \cos \theta T_{xy} - r \sin \theta \cos \theta T_{yx} + r \cos^2 \theta T_{yy} \right\} \\ &= r \left\{ -\cos \theta T_x - \sin \theta T_y + r \sin^2 \theta T_{xx} - 2r \sin \theta \cos \theta T_{xy} + \cos^2 \theta T_{yy} \right\} \\ &= r \left\{ -\cos \theta T_x - \sin \theta T_y \right\} + r^2 \left\{ \sin^2 \theta T_{xx} - 2 \sin \theta \cos \theta T_{xy} + \cos^2 \theta T_{yy} \right\} \\ &= r \left\{ -\cos \theta \left(\cos \theta T_r - \frac{\sin \theta}{r} T_\theta \right) - \sin \theta \left(\sin \theta T_r + \frac{\cos \theta}{r} T_\theta \right) \right\} \\ &\quad + r^2 \left\{ \sin^2 \theta T_{xx} + (\cos^2 \theta T_{xx} + \sin^2 \theta T_{yy} - T_{rr}) + \cos^2 \theta T_{yy} \right\} \\ &= r(-\cos^2 \theta T_r - \sin^2 \theta T_r) + r^2 (T_{xx} + T_{yy} - T_{rr}) \quad (4.20) \end{aligned}$$

atau dapat ditulis sebagai berikut :

$$T_{\theta\theta} = -r T_r + r^2 (T_{xx} + T_{yy}) - r^2 T_{rr}$$

$$r^2 (T_{xx} + T_{yy}) = r T_r + r^2 T_{rr} + T_{\theta\theta}$$

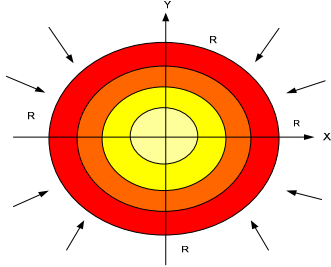
$$T_{xx} + T_{yy} = \frac{1}{r} T_r + T_{rr} + \frac{1}{r^2} T_{\theta\theta} \quad (4.21)$$

selanjutnya dengan Substitusi persamaan (4.21) ke persamaan (4.11) maka didapat

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad (4.22)$$

dan persamaan (4.22) inilah yang disebut sebagai persamaan panas pada benda dimensi tiga dalam koordinat tabung.

Karena kaleng yang diperlihatkan berbentuk tabung yang bersifat simetri sehingga perambatan panas tidak bergantung pada besar sudut θ .



Gambar 4.3 Perambatan panas pada sisi kaleng

maka, $\frac{\partial T}{\partial \theta} = 0$ dan $\frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} = 0$, sehingga didapat

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad (4.23)$$

Persamaan (4.23) adalah persamaan panas pada kaleng yang berbentuk tabung, dengan $T(r,z,t)$ adalah suhu bahan makanan di lokasi kaleng (r,z) dengan $r(0 \leq r \leq R)$ dan $z(-L/2 \leq z \leq L/2)$ saat waktu t .

Untuk melengkapi pemodelan kendala yang diberikan pada perambatan panas, ditambahkan syarat awal dan syarat batas sebagai berikut.

Syarat Awal

pada waktu *initial time* t_i suhu awalnya adalah T_0

$$T(r, z, t_i) = T_0 \quad \forall r \in [0, R) \quad \forall z \in \left[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right] \quad (4.24)$$

Syarat Batas

Suhu di Sekeliling, dasar dan atas kaleng diberikan oleh

$$\begin{aligned} T[r, z, t] &= T(t) & \forall z \in \left[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right] \\ T\left[r, -\frac{L}{2}, t\right] &= T(t) & \forall r \in [0, R] \\ T\left[r, \frac{L}{2}, t\right] &= T(t) & \forall r \in [0, R] \end{aligned} \quad (4.25)$$

sedangkan suhu di sepanjang sumbu z , yaitu $r = 0$ tidak berubah terhadap r

$$\frac{\partial u}{\partial r} = 0, \quad r = 0 \quad \forall z \in \left[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right] \quad (4.26)$$

4.2 Penyelesaian dan simulasi model penyelesaian

Penyelesaian dan simulasi model dari permasalahan (4.23)-(4.25) menggunakan metode beda hingga untuk menentukan solusi numeriknya. Konsep yang digunakan pada metode beda hingga adalah mengubah sistem persamaan diferensial parsial ke sistem persamaan diferensial biasa dengan mendiskritisasi ruang domainnya. Ruang (r,z,t) didiskritisasi dengan N titik ($i=1,2,3,\dots,N$) untuk dimensi r , M titik ($j=1,2,3,\dots,M$) untuk dimensi z dan P titik ($k=1,2,3,\dots,P$) untuk dimensi t dengan

$$r_i = R - (i-1)\Delta r \quad (4.27)$$

$$z_j = -\frac{L}{2} + (j-1)\Delta z \quad (4.28)$$

$$t_k = (k-1)\Delta t \quad (4.29)$$

dengan

$$\Delta r = \frac{R}{N-1} \quad (4.30)$$

$$\Delta z = \frac{L}{M-1} \quad (4.31)$$

$$\Delta t = \frac{T}{P-1} \quad (4.32)$$

Persamaan beda hingga digunakan untuk pendekatan turunan parsial dari $T(r,z,t)$ dengan

$$\frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r_i, z_j, t_k} \approx \frac{T(r_i + \Delta r, z_j, t_k) - T(r_i - \Delta r, z_j, t_k)}{2\Delta r} \quad (4.33)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} \Big|_{r_i, z_j, t_k} \approx \frac{T(r_i + \Delta r, z_j, t_k) - 2T(r_i, z_j, t_k) + T(r_i - \Delta r, z_j, t_k)}{\Delta r^2} \quad (4.34)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \Big|_{r_i, z_j, t_k} \approx \frac{T(r_i, z_j + \Delta z, t_k) - 2T(r_i, z_j, t_k) + T(r_i, z_j - \Delta z, t_k)}{\Delta z^2} \quad (4.35)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} \Big|_{r_i, z_j, t_k} \approx \frac{T(r_i, z_j, t_k + \Delta t) - T(r_i, z_j, t_k)}{\Delta t} \quad (4.36)$$

dan untuk mempermudah notasi diberikan $T_{i,j,k} = T(r_i, z_j, t_k)$ sehingga

$$T(r_i + \Delta r, z_j, t_k) = T_{i+1,j,k} \quad (4.37)$$

$$T(r_i - \Delta r, z_j, t_k) = T_{i-1,j,k} \quad (4.38)$$

$$T(r_i, z_j + \Delta z, t_k) = T_{i,j+1,k} \quad (4.39)$$

$$T(r_i, z_j - \Delta z, t_k) = T_{i,j-1,k} \quad (4.40)$$

$$T(r_i, z_j, t_k + \Delta t) = T_{i,j,k+1} \quad (4.41)$$

persamaan (4.33)-(4.36) disubstitusikan ke Persamaan (4.23) sehingga didapat

$$\frac{1}{\alpha} \frac{T_{i,j,k+1} - T_{i,j,k}}{\Delta t} = \frac{T_{i+1,j,k} - T_{i-1,j,k}}{2\Delta r} + \frac{T_{i,j+1,k} - 2T_{i,j,k} + T_{i,j-1,k}}{\Delta r^2} + \frac{T_{i,j,k+1} - 2T_{i,j,k} + T_{i,j-1,k}}{\Delta z^2} \quad (4.42)$$

untuk $i = 2,3,4,\dots,N-1, j = 2,3,4,\dots,M-1, k = 1,2,3,\dots,P$

Sedangkan untuk syarat batasnya, diberikan oleh

$$T_{i,j,k} = T(t), j = 1,2,3,\dots,M, k = 2,3,\dots,P \quad (4.43)$$

$$T_{i,j,k} = T(t), i = 1,2,3,\dots,N, k = 2,3,\dots,P \quad (4.44)$$

$$T_{i,M,k} = T(t), i = 1,2,3,\dots,N, k = 2,3,\dots,P \quad (4.45)$$

Pada pusat kaleng dan sepanjang tinggi kaleng gradien $\frac{\partial T}{\partial r} = 0$ sehingga didapat dari persamaan (4.33)

untuk $r = 0$, ($i = N$), maka

$$T(R + \Delta r, z_j, t_k) = T(R - \Delta r, z_j, t_k) \text{ atau}$$

$T_{N+1,j,k} = T_{N-1,j,k}$ dan kemudian disubstitusikan ke

Persamaan (4.42) didapat

$$T_{N,j,k+1} = T_{N,j,k} + \frac{2\alpha\Delta t}{\Delta r^2} [T_{N-1,j,k} - T_{N,j,k}] + \frac{\alpha\Delta t}{\Delta z^2} [T_{N,j+1,k} - 2T_{N,j,k} + T_{N,j-1,k}] \quad (4.46)$$

Contoh 4.2

Misalkan diberikan persamaan panas (4.23) dengan syarat awalnya $T_0 = 0$ (dapat pula dengan nilai besaran yang lain, misal = 100), konstanta $\alpha = 1,2 \times 10^{-7} m^2 / s$, jari-jari kaleng $R = 0,025$ m dan tinggi kaleng $L = 0,06$ m, maka solusi numerik pada pusat kaleng diberikan oleh gambar 4.4 berikut



Gambar 4.4 Solusi numerik contoh 4.2

Dari Gambar diatas dapat dijelaskan kondisi suhu pada pusat kaleng dengan kondisi syarat awalnya bernilai nol dan syarat batasnya bernilai satu tidak melewati suhu syarat batasnya sepanjang pergerakan waktunya.

4.3 Beberapa model fenomena lain dari sterilisasi makanan kaleng

Seperti yang telah disampaikan sebelumnya, proses sterilisasi makanan kaleng dengan pemanasan dilakukan untuk penentuan jaminan keselamatan bahan makanan,

jaminan ini meliputi tepat tidaknya tanggal kadaluwarsa yang tercantum pada label, rusak tidaknya kualitas makanan dan jumlah kandungan nutrisi yang ada. Hal tersebut terjadi akibat keberadaan mikroorganisme makanan kaleng. Sebagai tinjauan tambahan terhadap pemanasan makanan kaleng akan diberikan fenomena lain mengenai mikroorganisme tersebut.

4.3.1 Pemodelan nilai sterilisasi

Fenomena lain dari sterilisasi makanan kaleng yang sangat penting adalah penentuan nilai sterilisasi pada akhir waktu. Nilai sterilisasi ini menentukan derajat kehancuran mikroorganisme didalam bahan makanan dan relatif terhadap konsentrasi mikroorganismenya, nilai sterilisasi disini diberikan dengan besaran F_0 jika $c(r,z,t)$ adalah konsentrasi dari mikroorganisme pada lokasi (r,z) saat waktu t , maka $c(0,0,t)$ adalah konsentrasi mikroorganisme pada pusat kaleng saat waktu t . Seperti yang disebutkan di atas, nilai sterilisasi ini lebih dilihat pada pusat kaleng karena tempat ini lebih lambat menerima panas sehingga kemungkinan besar mempunyai konsentrasi mikroorganisme terbesar.

Kehancuran mikroorganisme akibat pemanasan diberikan oleh persamaan difrensial berikut :

$$\frac{dc(0,0,t)}{dt} = kc(0,0,t) \quad (4.47)$$

$$c(0,0,t_i) = c_0$$

Dengan c_0 adalah konsentrasi awal, parameter k merupakan sebuah fungsi dari suhu. Ketergantungan fungsi ini dapat dilihat pada parameter jumlah waktu β yang dibutuhkan untuk mereduksi konsentrasi mikroorganisme.

$$\beta = \frac{\ln(10)}{k} \quad (4.48)$$

dan suhu yang dihasilkan σ_{ref} dibutuhkan untuk mereduksi besar dari β yang berhubungan dengan sebuah suhu acuan T_{ref} oleh sebuah faktor dari 10

$$\beta = \beta_{ref} \exp \left\{ \ln 10 \frac{T(0,0,t) - T_{ref}}{\sigma_{ref}} \right\} \quad (4.49)$$

dengan $T(0,0,t)$ adalah suhu pada pusat kaleng. substitusi (4.48) ke (4.47) didapat nilai k

$$k = \frac{\ln(10)}{\beta_{ref}} \exp \left\{ \ln 10 \frac{T(0,0,t) - T_{ref}}{\sigma_{ref}} \right\} \quad (4.50)$$

jika persamaan (4.46) diselesaikan maka didapat

$$\frac{dc}{dt} = -kc$$

$$\frac{dc}{c} = -kdt$$

$$\int_{c_0}^{c_t} \frac{dc}{c} = -k \int_{t_0}^{t_1} dt$$

$$\ln c_t - \ln c_0 = -k \int_{t_0}^{t_1} dt$$

$$\ln \left(\frac{c_t}{c_0} \right) = - \int_{t_0}^{t_1} \frac{\ln(10)}{\beta} dt$$

$$\frac{c_t}{c_0} = \exp \left\{ - \int_{t_0}^{t_1} \frac{\ln(10)}{\beta_{ref}} \exp \left\{ \ln(10) \frac{T(0,0,t) - T_{ref}}{\sigma_{ref}} \right\} dt \right\}$$

$$= \exp \left\{ - \frac{\ln 10}{\beta_{ref}} \int_{t_0}^{t_1} \exp \left\{ \ln(10) \frac{T(0,0,t) - T_{ref}}{\sigma_{ref}} \right\} dt \right\}$$

$$\frac{c(0,0,t)}{c_0} = \exp \left\{ - \frac{\ln(10)}{\beta_{ref}} \int_{t_0}^{t_1} \exp \left\{ \ln(10) \frac{T(0,0,t) - T_{ref}}{\sigma_{ref}} \right\} dt \right\} \quad (4.51)$$

Pada persamaan terakhir (4.51) diatas, nilai sterilisasi pada waktu t didefinisikan dengan

$$F_0(t) = \int_{t_0}^{t_1} \exp \left\{ \frac{\ln(10)}{\sigma_{ref}} (T(0,0,t) - T_{ref}) \right\} dt \quad (4.52)$$

Jika diberikan derajat sterilisasi F yang diinginkan pada akhir waktu, maka harus dipastikan

$$F_0(t_f) \geq F \quad (4.53)$$

begitu pula untuk suhu akhir harus

$$T(0,0,t_f) \leq T_f \quad (4.54)$$

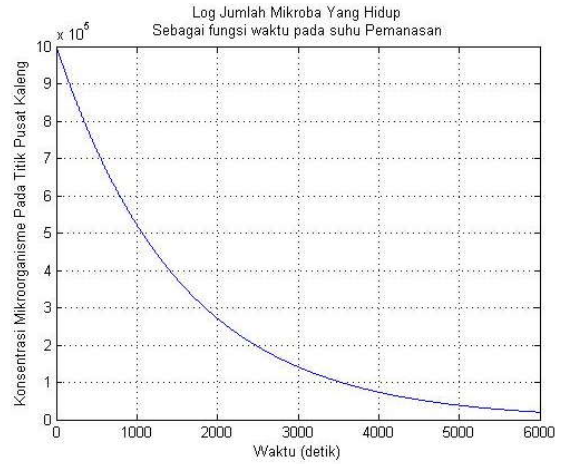
dan konsentrasi dari mikroorganisme saat akhir waktu harus memenuhi:

$$c(0,0,t_f) \leq c_0 \exp \left\{ - \frac{\ln(10)}{\beta_{ref}} F \right\} \quad (4.55)$$

Contoh 4.3.1

Misalkan diberikan persamaan panas (4.46) sebagai titik pusat kaleng dengan syarat awalnya $T_0 = 0$ (dapat pula dengan nilai besaran yang lain, misal = 100), konstanta $\alpha = 1,2 \times 10^{-7} m^2 / s$, jari-jari kaleng $R = 0,025$ m dan tinggi kaleng $L = 0,06$ m, dengan grid tinggi = 3, grid jari-jari = 2 dan grid waktu = 10 maka kondisi pada titik

pusat kaleng ketika dipanaskan selama 10 menit ditunjukkan oleh gambar 4.5



Gambar 4.5 Kondisi titik pusat kaleng setelah dipanaskan selama 10 menit

V. Kesimpulan dan Saran

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan analisa dan pembahasan yang telah dilakukan terhadap perpindahan panas pada proses sterilisasi makanan kaleng, maka dapat disimpulkan bahwa:

1. Proses perambatan panas pada proses sterilisasi makanan kaleng yang berbentuk tabung dapat dituliskan dalam bentuk PDP orde dua sebagai berikut. Jika $T(r,z,t)$ adalah suhu bahan makanan di lokasi kaleng (r,z) dengan $r(0 \leq r \leq R)$ dan $z(-\frac{L}{2} \leq z \leq \frac{L}{2})$ saat waktu t , maka persamaan

$$\text{panasnya adalah } \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

Dan syarat awal dan batasnya

$$T(r,z,t_i) = T_0 \quad \forall r \in [0, R] \quad \forall z \in \left[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2} \right],$$

$$T(r, z, t) = T(t) \quad \forall r \in \left[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2} \right],$$

$$T(r, -\frac{L}{2}, t) = T(t) \quad \forall r \in [0, R],$$

$$T(r, \frac{L}{2}, t) = T(t) \quad \forall r \in [0, R],$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} = 0, r = 0 \quad \forall z \in \left[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2} \right],$$

2. dari simulasi model yang dilakukan untuk beberapa parameter $\alpha = 1.2 \times 10^{-7} \text{ m}^2 / \text{s}$
R = 0,025m dan L = 0,06m dapat disimpulkan bahwa suhu pada pusat kaleng dengan kondisi syarat awalnya bernilai nol dan syarat batasnya bernilai satu tak melewati suhu syarat batasnya sepanjang pergerakan waktunya.

5.2 Saran

Adapun saran dari Tugas Akhir ini adalah masih terbuka untuk penelitian lanjutan, khususnya mengenai penyelesaian model kontrol optimal pada nilai sterilisasi makanan kaleng.

DAFTAR PUSTAKA

- Kreith F, Prijono A 1997, *Prinsip-prinsip Perpindahan Panas*, Edisi ketiga. Erlangga, Jakarta
- Holman J.P., Jasjfi E.1994, *Perpindahan kalor*. Erlangga, Jakarta
- Basarudin T, 1994, *Metode Beda hingga untuk persamaan difrensial*, Elex Media Komputindo, Jakarta
- Soehardjo, 1996, *Matematika 4*, ITS, Surabaya.
- Kannan A, Gourisankar P.Ch., Sandaka 2008 . *Heat Transfer Analysis of canned food Sterilization in a Still Retort*. Journal of Food Engineering 88 213-228.
- Kusnandar F ,dkk . 2008. *Aspek Mikrobiologi Makanan Kaleng*, <http://www.unhas.ac.id/gdln/dirpan/pengalengan/Topik6/modul/> diakses tanggal 28 Februari 2009.